科学与科学史系列·之五

数学杂谈

卢昌海

First Edition: 2023.12
Second Edition: 2024.12

For information, please email
lu_changhai@yahoo.com.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

过去、现在及未来的所有数学家们彼此都是同事，他们献身于一个共同的目标，那便是最美丽的科学与艺术。

目录

第二版自序

本书意在汇集我历年所撰关于数学的单篇或短系列的文字。不过第一版的汇集过于偏向纯数学，这个第二版则添加了应用数学类的“谷歌背后的数学”（是应用之中影响较大的），及数学书话类的“罗素的‘大罪’——《数学原理》”和“弗雷格的算术”（是书话之中数学较多的）。

2024 年 12 月 26 日

第一版自序

在我制作所谓“本站电子书”之初，大体是打算令其与实体书互补的。因此，但凡出于某种缘故，“本站电子书”收录了可被（或曾被）实体书收录的文字，我就会注明其收录了所谓“实体书素材”。但这种标注今后不需要了，因为自《最壮丽的世界线》出版搁浅以来[1]，我再未出过实体书。今后除非出现实体书出版境况回归正常之“意外”，我的文字都将只以“本站电子书”的形式结集。既然不再出实体书，自然不必再注“实体书素材”了——尽管本书原本是该注的。此为“皮之不存，毛将焉附”之又一例。

2023 年 11 月 28 日

[1] 关于《最壮丽的世界线》出版搁浅一事，可参阅同名电子书（2022 年）的自序。

魔方与“上帝之数”

2008 年 7 月，来自世界各地的很多优秀的魔方玩家聚集在捷克共和国（Czech Republic）中部城市帕尔杜比采（Pardubice），参加魔方界的重要赛事：捷克公开赛。在这次比赛上，荷兰玩家阿克斯迪杰克（Erik Akkersdijk）创下了一个惊人的纪录：只用 7.08 秒就复原了一个颜色

被打乱的魔方。无独有偶，在这一年的 8 月，人们在研究魔方背后的数学问题上也取得了重要进展。在本文中，我们就来介绍一下魔方以及它背后的数学问题。

1. 风靡世界的玩具

1974 年春天，匈牙利布达佩斯应用艺术学院（Budapest College of Applied Arts）的建筑学教授鲁比克（Ernő Rubik）萌生了一个有趣的念头，那就是设计一个教学工具来帮助学生直观地理解空间几何中的各种转动。经过思考，他决定制作一个由一些小方块组成的，各个面能随意转动的 $3\times3\times3$ 的立方体。这样的立方体可以很方便地演示各种空间转动。

这个想法虽好，实践起来却面临一个棘手的问题，即如何才能让这样一个立方体的各个面能随意转动？鲁比克想了很多点子，比如用磁铁或橡皮筋连接各个小方

块，但都不成功。那年夏天的一个午后，他在多瑙河畔乘凉，眼光不经意地落在了河畔的鹅卵石上。忽然，他心中闪过一个新的设想：用类似于鹅卵石表面那样的圆形表面来处理立方体的内部结构。这一新设想成功了，鲁比克很快完成了自己的设计，并向匈牙利专利局申请了专利。这一设计就是我们都很熟悉的魔方（magic cube），也叫鲁比克方块（Rubik's cube）[15]。

6 年后，鲁比克的魔方经过一位匈牙利商人兼业余数学家的牵头，打进了西欧及美国市场，并以惊人的速度成为了风靡全球的新潮玩具。在此后的 25 年间，魔方的销量超过了 3 亿个。在魔方的玩家中，既有牙牙学语的孩子，也有跨国公司的老总。魔方虽未如鲁比克设想的那样成为一种空间几何的教学工具，却变成了有史以

[15] “魔方”是鲁比克自己为这一设计所取的名字，“鲁比克方块”则是美国玩具公司 Ideal Toys 所取的名字。在西方国家，鲁比克方块这一名称更为流行，在中国，则是魔方这一名称更为流行。另外要提醒读者的是，魔方有很多种类，本文介绍的 $3\times3\times3$ 魔方只是其中最常见的一种。

来最畅销的玩具。

魔方之畅销，最大的魔力就在于其数目惊人的颜色组合。一个魔方出厂时每个面各有一种颜色，总共有 6 种颜色，但这些颜色被打乱后，所能形成的组合数却多达 **4,325 亿亿**[16]。如果我们将这些组合中的每一种都做成一个魔方，这些魔方排在一起，可以从地球一直排到 250 光年外的遥远星空——也就是说，如果我们在这样一排魔方的一端点上一盏灯，那灯光要在 250 年后才能照到

[16] 具体的计算是这样的：在组成魔方的小立方体中，有 8 个是顶点，它们之间有 8!种置换；这些顶点每个有 3 种颜色，从而在朝向上有 37 种组合（由于结构所限，魔方的顶点只有 7 个能有独立朝向）。类似的，魔方有 12 个小立方体是边，它们之间有 $12!/2$ 种置换（之所以除以 2，是因为魔方的顶点一旦确定，边的置换就只有一半是可能的）；这些边每个有两种颜色，在朝向上有 211 种组合（由于结构所限，魔方的边只有 11 个能有独立朝向）。因此，魔方的颜色组合总数为 $8! \times 37 \times 12! \times 211/2 = 43{,}252{,}003{,}274{,}489{,}856{,}000$，即大约 4,325 亿亿。另外值得一提的是，倘若我们允许将魔方拆掉重组，则前面提到的结构限定将不复存在，它的颜色组合数将多达 51,900 亿亿种。不过颜色组合数的增加并不意味着复原的难度变大，魔方结构对颜色组合数的限制实际上正是使魔方的复原变得困难的主要原因。举个例子来说，26 个英文字母在相邻字母的交换之下共有约 400 亿亿亿种组合，远远多于魔方颜色的组合数，但通过相邻字母的交换将随意排列的 26 个英文字母复原成从 A 到 Z 的初始排列却非常简单。

另一端！如果哪位勤勉的玩家想要尝试所有的组合，哪怕他不吃、不喝、不睡，每秒钟转出 10 种不同的组合，也要花 1,500 亿年的时间才能如愿（作为比较，我们的宇宙目前还不到 140 亿岁）。与这样的组合数相比，广告商们常用的“成千上万”、“数以亿计”、“数以十亿计”等平日里虚张声势、忽悠顾客的形容词反倒变成了难得的谦虚。我们可以很有把握地说，假如不掌握诀窍地随意乱转，一个人哪怕从宇宙大爆炸之初就开始玩魔方，也几乎没有任何希望将一个色彩被打乱的魔方复原。

2. 魔方与“上帝之数”

魔方的玩家多了，相互间的比赛自然是少不了的。自 1981 年起，魔方爱好者们开始举办世界性的魔方大赛，从而开始缔造自己的世界纪录。这一纪录被不断地刷新着，截至 2013 年，复原魔方的最快纪录已经达到了令人吃惊的 5.55 秒。当然，单次复原的纪录存在一定的

偶然性，为了减少这种偶然性，自 2003 年起，魔方大赛的冠军改由多次复原的平均成绩（确切地说是取 5 次尝试中居中的 3 次成绩的平均值）来决定，截至 2013 年，这一平均成绩的世界纪录为 6.54 秒[17]。这些纪录的出现，表明魔方虽有天文数字般的颜色组合，但只要掌握窍门，将任何一种给定的颜色组合复原所需的转动次数却很可能并不多。

那么，最少需要多少次转动，才能确保**无论什么样的颜色组合**都能被复原呢[18]？这个问题引起了很多人，尤其是数学家们的兴趣。这个**复原任意组合**所需的最少转动次数被数学家们戏称为“上帝之数”（God's number），

[17] 整理注：这些纪录都早已被重新打破，截止本文整理之时（2023 年 11 月），魔方的单次复原最快纪录已被美国玩家 Max Park 改写为 3.13 秒；多次复原的平均成绩纪录则被中国玩家王艺衡刷新为 4.48 秒。

[18] 为了使这一问题有意义，当然首先要定义什么是转动。在对魔方的数学研究中，转动是指将魔方的任意一个（包含 9 个小方块的）面沿顺时针或逆时针方向转动 90° 或 180°，对每个面来说，这样的转动共有 3 种（请读者想一想，为什么不是 4 种？）。由于魔方有 6 个面，因此它的基本转动方式共有 18 种。

而魔方这个玩具世界的宠儿则由于这个“上帝之数”而一举侵入了学术界。

要研究“上帝之数”，首先当然要研究魔方的复原方法。在玩魔方的过程中，人们早就知道，将任何一种**给定的颜色组合**复原都是很容易的，这一点已由玩家们的无数杰出纪录所示范。不过魔方玩家们所用的复原方法是便于人脑掌握的方法，却不是转动次数最少的，因此无助于寻找“上帝之数”。寻找转动次数最少的方法是一个有一定难度的数学问题。当然，这个问题是难不倒数学家的。早在 20 世纪 90 年代中期，人们就有了较实用的算法，可以用平均 15 分钟左右的时间找出复原一种**给定的颜色组合**的**最少转动次数**。从理论上讲，如果有人能对每一种颜色组合都找出这样的最少转动次数，那么这些转动次数中最大的一个无疑就是“上帝之数”了。但可惜的是，“4,325 亿亿”这个巨大数字成为了人们窥视“上帝之数”的拦路虎。如果采用上面提到的算法，

用上面提到的速度寻找，哪怕用一亿台计算机同时进行，也要用超过 1000 万年的时间才能完成。

看来蛮干是行不通的，数学家们于是便求助于他们的老本行：数学。从数学的角度看，魔方的颜色组合虽然千变万化，其实都是由一系列基本操作——即转动——产生的，而且那些操作还具有几个非常简单的特点，比如任何一个操作都有一个相反的操作（比如与顺时针转动相反的操作就是逆时针转动）。对于这样的操作，数学家们的“武器库”中有一种非常有效的工具来对付它，这工具叫做群论（group theory），它比魔方问世早了 140 多年就已出现了。据说德国数学大师希尔伯特（David Hilbert）曾经表示，学习群论的窍门就是选取一个好的例子。自魔方问世以来，数学家们已经写出了好几本通过魔方讲述群论的书。因此，魔方虽未成为空间几何的教学工具，却在一定程度上可以作为学习群论的“好的例子”。

对魔方研究来说，群论有一个非常重要的优点，就是可以充分利用魔方的对称性。我们前面提到“4,325 亿亿”这个巨大数字时，其实有一个疏漏，那就是未曾考虑到魔方作为一个立方体所具有的对称性。由此导致的结果，是那 4,325 亿亿种颜色组合中有很多其实是完全相同的，只是从不同的角度去看——比如让不同的面朝上或者通过镜子去看——而已。因此，“4,325 亿亿”这个令人望而生畏的数字实际上是“注水猪肉”。那么，这“猪肉”中的“水份”占多大比例呢？说出来吓大家一跳：占了将近 99%！换句话说，仅凭对称性一项，数学家们就可以把魔方的颜色组合减少两个数量级[19]。

但减少两个数量级对于寻找“上帝之数”来说还是远远不够的，因为那不过是将前面提到的 1,000 万年的时间减少为了 10 万年。对于解决一个数学问题来说，10

[19] 确切地说，是减少至 1/96，或 45 亿亿种组合。

万年显然还是太长了，而且我们也并不指望真有人能动用一亿台计算机来计算“上帝之数”。数学家们虽然富有智慧，在其它方面却不见得富有，他们真正能动用的也许只有自己书桌上那台计算机。因此为了寻找“上帝之数”，人们还需要更巧妙的思路。幸运的是，群论这一工具的威力远不只是用来分析象立方体的对称性那样显而易见的东西，在它的帮助下，更巧妙的思路很快就出现了。

3. 寻找“上帝之数”

1992 年，德国数学家科先巴（Herbert Kociemba）提出了一种寻找魔方复原方法的新思路[20]。他发现，在魔方

[20] 科先巴的新思路是本文介绍的一系列计算研究的起点，但并不是最早的魔方算法。早在 1981 年，目前在美国田纳西大学（University of Tennessee），当时在伦敦南岸大学（London South Bank University）的数学家西斯尔斯韦特（Morwen Thistlethwaite）就提出了一种算法，被称为西斯尔斯韦特算法（Thistlethwaite algorithm）。西斯尔斯韦特算法可保证通过不超过 52 次转动复员魔方的任意一种颜色组合（相当于证明了上帝之数不超过 52），在科先巴新思路问世之前的 1991 年，这一数字曾被压缩到 42。

的基本转动方式中，有一部分可以自成系列，通过这部分转动可以形成将近 200 亿种颜色组合[21]。利用这 200 亿种颜色组合，科先巴将魔方的复原问题分解成了两个步骤：第一步是将任意一种颜色组合转变为那 200 亿种颜色组合之一，第二步则是将那 200 亿种颜色组合复原。如果我们把魔方的复原比作是让一条汪洋大海中的小船驶往一个固定目的地，那么科先巴提出的那 200 亿种颜色组合就好比是一片特殊水域——一片比那个固定目的地大了 200 亿倍的特殊水域。他提出的两个步骤就好比是让小船首先驶往那片特殊水域，然后从那里驶往那个固定目的地。在汪洋大海中寻找一片巨大的特殊水域，显然要比直接寻找那个小小的目的地容易得多，这就是科先巴新思路的巧妙之处。

但即便如此，要用科先巴的新思路对“上帝之数”

[21] 确切地说，是 18 种基本转动方式中有 10 种自成系列，由此形成的颜色组合共有 $8! \times 8! \times 4!/2$（约 195 亿）种。

进行估算仍不是一件容易的事。尤其是，要想进行快速计算，最好是将复原那 200 亿种颜色组合的最少转动次数（这相当于是那片特殊水域的“地图”）存储在计算机的内存中，这大约需要 300 兆（300 MB）的内存。300 兆在今天看来是一个不太大的数目，但在科先巴提出新思路的年代，普通计算机的内存连它的十分之一都远远不到。因此直到 3 年之后，才有人利用科先巴的新思路给出了第一个估算结果。此人名叫里德（Michael Reid），是美国中佛罗里达大学（Unversity of Central Florida）的数学家。1995 年，里德通过计算发现，最多经过 12 次转动，就可以将魔方的任意一种颜色组合转变为科先巴新思路中那 200 亿种颜色组合之一；而最多经过 18 次转动，就可以将那 200 亿种颜色组合中的任意一种复原。这表明，最多经过 $12 + 18 = 30$ 次转动，就可以将魔方的任意一种颜色组合复原。

在得到上述结果后，里德很快对自己的估算作了改

进，将结果从 30 减少为了 29，这表明“上帝之数”不会超过 29。此后随着计算机技术的发展，数学家们对里德的结果又作出了进一步改进，但进展并不迅速。直到 11 年后的 2006 年，奥地利开普勒大学（Johannes Kepler University）符号计算研究所（Research Institute for Symbolic Computation）的博士生拉杜（Silviu Radu）才将结果推进到了 27。第二年（即 2007 年），美国东北大学（Northeastern University）的计算机科学家孔克拉（Dan Kunkle）和库伯曼（Gene Cooperman）又将结果推进到了 26，他们的工作采用了并行计算系统，所用的最大存储空间高达 700 万兆（7×10^6 MB），所耗的计算时间则长达 8,000 小时（相当于将近一年的 24 小时不停歇计算）。

这些计算表明，“上帝之数”不会超过 26。但是，所有这些计算的最大优点——即利用科先巴新思路中那片特殊水域——同时也是它们最致命的弱点，因为它们给

出的复原方法都必须经过那片特殊水域。可事实上，很多颜色组合的最佳复原方法根本就不经过那片特殊水域，比如紧邻目的地，却恰好不在特殊水域中的任何小船，显然都没必要象中国大陆和台湾之间的直航包机一样，故意从那片特殊水域绕一下才前往目的地。因此，用科先巴新思路得到的复原方法未必是最佳的，由此对“上帝之数”所做的估计也极有可能是高估。

可是，如果不引进科先巴新思路中的特殊水域，计算量又实在太大，怎么办呢？数学家们决定采取折衷手段，即扩大那片特殊水域的“面积”。因为特殊水域越大，最佳复原路径恰好经过它的可能性也就越大（当然，计算量也会有相应的增加）。2008 年，研究“上帝之数”长达 15 年之久的计算机高手罗基奇（Tomas Rokicki）运用了相当于将科先巴新思路中的特殊水域扩大几千倍的巧妙方法，在短短几个月的时间内对“上帝之数”连续发动了四次猛烈攻击，将它的估计值从 25 一直压缩到了

22 ——这就是本文开头提到的人们在研究魔方背后的数学问题上取得的重要进展。罗基奇的计算得到了电影特效制作商索尼图形图像运作公司（Sony Pictures Imageworks）的支持，这家曾为“蜘蛛人”（Spider-Man）等著名影片制作特效的公司向罗基奇提供了相当于 50 年不停歇计算所需的计算机资源。

由此我们进一步知道，“上帝之数”一定不会超过 22。但是，罗基奇虽然将科先巴新思路中的特殊水域扩展得很大，终究仍有一些颜色组合的最佳复原方法是无需经过那片特殊水域的，因此，“上帝之数”很可能比 22 更小。那么，它究竟是多少呢？种种迹象表明，它极有可能是 20。这是因为，人们在过去这么多年的所有努力——其中包括罗基奇直接计算过的大约 4,000 万亿种颜色组合——中，都从未遇到过任何必须用 20 次以上转动才能复原的颜色组合，这表明“上帝之数”**很可能不大于 20**；另一方面，人们已经发现了几万种颜色组合，它

们必须要用 20 次转动才能复原，这表明“上帝之数”**不可能小于 20**。将这两方面综合起来，数学家们普遍相信，“上帝之数”的真正数值就是 20。

2010 年 8 月，这个游戏与数学交织而成的神秘的“上帝之数”终于水落石出：研究“上帝之数”的“元老”科先巴、“新秀”罗基奇，以及另两位合作者——戴维森（Morley Davidson）和德斯里奇（John Dethridge）——宣布了对“上帝之数”是 20 的证明[22]。他们的证明得到了谷歌公司（Google）提供的相当于英特尔（Intel）四核心处理器 35 年不停歇计算所需的计算机资源。

因此，现在我们可以用数学特有的确定性来宣布“上帝之数”的数值了，那就是：**20**。

参考文献

[22] 他们所宣布的证明完成时间为 2010 年 7 月。

1. D. Kunkle & G. Cooperman, Twenty-Six Moves Suffice for Rubik's Cube, *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation* (ISSAC '07), ACM Press.
2. J. Palmer, Cracking the Hardest Mystery of the Rubik's Cube, *NewScientist*, 09 August 2008.
3. T. Rokicki, Twenty-Five Moves Suffice for Rubik's Cube, arXiv:0803.3435 [cs.SC].
4. S. Radu, New Upper Bounds on Rubik's Cube.
5. W. D. Joyner, Mathematics of the Rubik's cube.

2014 年 9 月 18 日

无穷集合可以比较吗？[23]

大家都知道，自然数（即 $1,2,3,\ldots$）有无穷多个，平方数（即 $1,4,9,\ldots$）也有无穷多个。现在我们来考虑这样一个问题：自然数和平方数哪个更多？有读者也许会说：“这还用问吗？当然是自然数多啦！”确实，平方数只是自然数的一部分，而整体大于部分，因此自然数应该比平方数更多。但细想一下，事情又不那么简单。因为每个自然数都有一个平方，每个平方数也都是某个自然数的平方，两者可以一一对应。从这个角度讲，它们又谁也不比谁更多，从而应该是一样多的——就好比两堆石头，就算不知道各有多少粒，如果能一粒一粒对应起来，我们就会说它们的数目一样多。

同一个问题，两个相互矛盾的答案，究竟哪一个答

[23] 本文是应《十万个为什么》第六版《数学》分册约稿而写的词条（但未被收录），文中的“科学人”和“微博士”是《十万个为什么》的指定体裁。

案正确呢？

像这种对无穷集合进行比较（即比较元素数目）的问题，曾经让许多科学家感到过困扰。比如著名的意大利科学家伽利略就考虑过我们上面这个问题。他的结论是：那样的比较是无法进行的。

不过，随着数学的发展，数学家们最终还是为无穷集合的比较建立起了系统性的理论，它的基石就是上面提到的一一对应的关系，即：两个无穷集合的元素之间如果存在一一对应，它们的元素数目就被定义为“相等”。按照这个定义，上面两个答案中的后一个，即自然数与平方数一样多，是正确的。

但有读者也许会问：前一个答案所依据的“整体大于部分”在欧几里德的《几何原本》中被列为公理，不也是很可靠的吗？为什么不能作为对无穷集合进行比较

科学人

对无穷集合进行比较的系统理论是德国数学家康托（George Cantor）提出的。康托生于 1845 年，是集合论的奠基者。康托的理论是如此新颖，连他自己也曾在给朋友的信件中表示“我无法相信”。与他同时代的许多其他数学家更是对他的理论表示了强烈反对，甚至进行了尖锐攻击。

但时间最终证明了康托的伟大。他的集合论成为了现代数学的重要组成部分。德国数学大师希尔伯特（David Hilbert）在一篇文章中表示“没有人能把我们从康托为我们开辟的乐园中赶走”。英国哲学家罗素（Bertrand Russell）也称康托的理论“也许是这个时代最值得夸耀的成就”。

的基石呢？这是因为，两个无穷集合之间通常并不存在一个是另一个的部分那样的关系。比如平方数的集合与素数（即 $2, 3, 5, 7, \ldots$）的集合就谁也不是谁的部分。如果用“整体大于部分”作为基石，就会无法比较。

这个证明所用到的构造新实数的方法被称为对角线方法，它在无穷集合的比较中是一种很重要的方法。

不过，“整体大于部分”也并没有被抛弃，因为在无穷集合的比较中，还会出现这样的情形，那就是一个无穷集合的元素能与另一个无穷集合的一部分元素一一对应，却不能与它的全体元素一一对应。在这种情形下，数学家们就会依据“整体大于部分”的原则，将后一个无穷集合的元素数目定义为“大于”前一个无穷集合的元素数目（或前一个无穷集合的元素数目“小于”后一个无穷集合的元素数目）。这种情形的一个例子，是自然数集合与实数集合的比较。很明显，自然数集合的元素（即自然数）能与实数集合的一部分元素（即实数中的自然数）一一对应，但它能否与实数集合的全体元素（即实数）一一对应呢？答案是否定的。因此自然数集合的元素数目“小于”实数集合的元素数目。

微博士

我们在正文中举过一个例子，那就是自然数集合的元素数目“小于”实数集合的元素数目。现在让我们来证明这一点。我们要证明的是自然数不能与 0 和 1 之间的实数一一对应（从而当然也不能与全体实数一一对应）。

我们用反证法：假设存在那样的一一对应，那么 0 和 1 之间的实数就都能以自然数为序号罗列出来。但是，我们总可以构造出一个新实数，它小数点后的每个数字都在 0 和 9 之间，并且第 n 位数字选成与第 n 个实数的小数点后第 n 位数字不同。显然，这样构造出来的实数与任何一个被罗列出来的实数都不同（因为小数点后至少有一个数字不同）。这与 0 和 1 之间的实数都能以自然数为序号罗列出来相矛盾。这个矛盾表明自然数是不能与 0 和 1 之间的实数一一对应的。

现在我们知道了在无穷集合的元素数目之间可以定

义“相等”、“大于”和“小于”这三种比较关系。但这还不等于是回答了“无穷集合可以比较吗？”这一问题。因为我们还不知道会不会有某些无穷集合，它们之间这三种关系全都不满足。那样的情形如果出现，就说明有些无穷集合是不能比较的——起码是不能用我们上面定义的这三种关系来比较。

那样的情形会不会出现呢？这是一个很棘手的问题，涉及到数学中一个很重要的分支——集合论——的微妙细节。而集合论有几个不同的“版本”，它们对这一问题的答案不尽相同。因此从某种意义上讲，这可以算是一个有争议的问题。不过，对于目前被最多数学家所使用的“版本”来说，这一问题的答案是明确的，即：那样的情形不会出现。换句话说，任何两个无穷集合都是可以比较的。

2012 年 6 月 7 日

实数都是代数方程的根吗？[24]

读者们大都在学校里学过解方程，其中解得最多的就是所谓代数方程，比如 $3x-1=0$，$x^2+2x-8=0$，等等。这些方程的一个主要特点，就是每一个包含未知数的项都只包含未知数的正整数次幂。除此之外，代数方程还有一个很重要的特点，那就是项的数目是有限的。

现在，我们要回答这样一个问题：实数都是代数方程的根吗？不过，仅凭上面的定义，这个问题是简单得毫无意义的，因为所有实数 r 显然都是代数方程 $x-r=0$ 的根，因此答案是肯定的。为了让问题有一定难度，我们要对上面的定义加一个限制，那就是每一项的系数（包括常数项）都只能是有理数。加上这一限制后

[24] 本文是应《十万个为什么》第六版《数学》分册约稿而写的词条，文中的“科学人”和“微博士”是《十万个为什么》的指定体裁。本文的发表稿受到一定程度的删改，标题则被调整为“实数都是整数系数代数方程的根吗？”。此处收录的是原稿。

的代数方程确切地讲应称为“有理数域上的代数方程”，不过为简洁起见，我们仍将称其为“代数方程”[25]。

现在让我们重新来回答“实数都是代数方程的根吗？”这一问题。首先很明显的是，所有有理数 q 都是代数方程 $x-q=0$ 的根。其次，学过一元二次方程的读者都知道，虽然所有系数都被限制为有理数，代数方程的根却不一定是有理数。比如 $x^2-2=0$ 的两个根，$\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$，就是无理数。因此，代数方程的根既可以是有理数，也可以是无理数，从而至少在表面上具备了表示所有实数的潜力。

但有潜力不等于能做到，关键得要有证明。最早对“实数都是代数方程的根吗？”这一问题作出回答并给于证明的是法国数学家刘维尔，他不仅证明了某些实数

[25] 需要提醒读者注意的是，不同文献对“代数方程”的定义不尽相同。在某些文献中，“代数方程”按定义就是“有理数域上的代数方程”。

科学人

法国数学家刘维尔（Joseph Liouville）是最早证明超越数存在的数学家。他于 1844 年给出了超越数存在的证明，并于 1851 年具体构造出了用十进位小数表示的超越数。刘维尔在数学及数学物理的某些其它领域也颇有成就。

刘维尔所构造的超越数抽象意义大于实用意义。更具实用意义的超越数，最早是由法国数学家厄密（Charles Hermite）证明的。他于 1873 年证明了 e 是超越数。厄密也在其它领域颇有贡献，许多数学及数学物理的术语是以他名字命名的。

另一位在超越数研究上作出过知名贡献的是德国数学家林德曼（Ferdinand von Lindemann）。他于 1882 年证明了 π 是超越数。林德曼在数学上没有太多其它贡献，但他有几位极著名的学生，比如著名数学家希尔伯特（David Hilbert）和闵科夫斯基（Hermann Minkowski），著名物理学家索末菲（Arnold Sommerfeld）等。

不是任何代数方程的根，而且还具体构造出了那样的实数，从而以最雄辩的方式给出了答案——否定的答案。

现在我们知道，有很多重要的实数，比如自然对数的底 e，圆周率 π，等，都不是代数方程的根。为了便于表述，数学家们把能够用代数方程的根来表示的数称为代数数，把不能用代数方程的根来表示的数称为超越数。实数既包含代数数，也包含超越数。有理数与 $\sqrt{2}$ 是代数数的例子；e 和 π 则是超越数的例子。我们的问题用这一新术语可以重新表述为：实数都是代数数吗？答案则如上所述是否定的。

不过，答案虽然揭晓了，找到或证明一个具体的超越数却往往不是容易的事情。比如对 e 和 π（尤其是 π）是超越数的证明就费了数学家们不小的气力。而像 $e+\pi$ 和 $e-\pi$ 那样的简单组合是否是超越数，则直到今天也还是谜。

微博士

刘维尔对超越数存在的证明并不只是构造出少数几个特殊的超越数，而是证明了一大类实数都是超越数。为了纪念他的贡献，那一大类实数被统称为了刘维尔数。可以证明，单刘维尔数这一种类型的超越数，就远比代数数多。不过，跟超越数的全体相比，刘维尔数依然只是凤毛鳞角。

刘维尔数最初是用连分数来表示的。第一个用十进位小数表示的刘维尔数（也是第一个用十进位小数表示的超越数）是 0.110001000……（小数点后面的数字规律是这样的：小数点后第 $n!$ ——即 n 的阶乘——位的数字为 1，其余的数字全都为零）。这个数通常被称为刘维尔常数，但有时候也被称为刘维尔数，虽然它其实只是无穷多个刘维尔数中的一个。

接下来我们还可以问一个问题，那就是代数数多还是超越数多？从构造和证明超越数如此困难来看，也许很多读者会猜测是代数数多。事实却恰恰相反。1874 年，

德国数学家康托证明了超越数远比代数数多（这里所涉及的是无穷集合元素数目的比较，感兴趣的读者可参阅拙作“无穷集合可以比较吗？”[26]）。事实上，他证明了实数几乎全都是超越数！

超越数的存在不仅仅具有抽象的分类意义，而且可以解决一些具体的数学问题。比如，几何中的“尺规作图”方法所能作出的线段的长度——相对于给定的单位长度——可被证明为只能是代数数[27]。因此 π 是超越数这一看似只具有抽象分类意义的结果，直接证明了困扰数学家们多年的“尺规作图三大难题”之一的“化圆为方”是不可能办到的。

最后，我们要补充提到的是，代数方程的根既可能是实数，也可能是复数。相应地，代数数和超越数这两

[26] 该文已收录于本书。

[27] 但反过来则不然，并不是所有长度由代数数表示的线段都能用“尺规作图”的方法作出。

个概念也适用于复数，并且与实数域中的情形类似，复数也并不都是代数数（事实上，复数也几乎全都是超越数）。

2012 年 6 月 18 日

卢昌海电子书·之十九

■■■ 作者的其他电子书 ■■■

11.《我的“疫年纪事”》
12.《漫话科学哲学》
13.《微言录》（三集）
14.《致编辑·报刊卷》
15.《乱世学人》
16.《致编辑·图书卷》
17.《星际旅行漫谈》
18.《最壮丽的世界线》

□□□ 更多电子书可查阅 □□□

https://www.changhai.org/articles/introduction/ebooks.php